Teoria do Risco
Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

- Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Cálculo de prêmios: Propriedades desejáveis. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_TR.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco.**

$$\Pi_S = E(S)$$

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado**

$$\Pi_S = E(S)(1+\theta)$$

- **Princípio da variância**

$$\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- **Princípio do Desvio padrão**

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.\boldsymbol{o}.}(W - S)]$$

- **Princípio do percentil**

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

A defesa, da utilização de um princípio em detrimentos aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis...

Propriedades

- Carregamento não-negativo.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

O prêmio não deve ser menor que o valor esperado a ser pago. No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- Aditividade.
  - Se S_1 e S_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{S_1+S_2}$, é igual a $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

A combinação de riscos tem que gerar um prêmio igual ao somatório dos prêmios quando se encaram os riscos individualmente.

Propriedades

- Escala invariante.

  Se $Z = aS$, em que $a > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_s$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

- Consistência.

  Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_s + c$

- Perda máxima.

  Seja r_S o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição S, então $\Pi_s \leq r_S$.

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento não-negativo.*

  $$\Pi_s \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

  $$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

  Se $Z = aS$, em que $a > 0$, então $E(Z) = aE(S)$

- *Consistência.*

  Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $E(Y) = E(S) + c$

- Perda máxima

  $$\Pi_s \leq r_S$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_s = E(S)(1+\theta)$

- *Carregamento não-negativo.*

$$\Pi_s \geq E(S)$$
$$E(S)(1+\theta) \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$
$$E(S_1+S_2)(1+\theta) = E(S_1)(1+\theta) + E(S_2)(1+\theta)$$

- *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1+\theta)E(Z) = (1+\theta)E(aS)$$
$$\Pi_z = a(1+\theta)E(S)$$
$$\Pi_z = a\Pi_s$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_s = E(S)(1+\theta)$

- *Consistência.*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então

$$\Pi_Y = (1+\theta)E(S+c) = (1+\theta)[E(S)+c],$$
$$\Pi_Y > \Pi_s + c.$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

- *Perda máxima*

Dado $P(S = 10) = 0{,}0000001$, $P(S = 11) = 0{,}9999999$, logo $r_s = 11$. A depender do valor de $\theta > 0$, tem-se que:

$$\Pi_s = (1+\theta)E(S) > E(S).$$

Como $\Pi_s > r_S$, essa propriedade não é satisfeita.

Princípio da variância $\Pi_s = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Carregamento não-negativo*

$$E(S) + var(S)\alpha \geq E(S)$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha\, var(S_1) + \alpha\, var(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha\, var(S_1) + E(S_2) + \alpha\, var(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, *em que* $a > 0$, *então*

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha\, var(Z) = E(aS) + \alpha\, var(aS),$$
$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha\, var(S),$$
$$\Pi_z \neq a\Pi_s$$

Princípio da variância $\Pi_s = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Consistência*

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \alpha\, var(Y),$$
$$\Pi_Y = E(S + c) + \alpha\, var(S + c),$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \alpha\, var(S),$$
$$\Pi_Y = \Pi_s + c.$$

- *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0{,}5$ então:

$$E(S) = 10,$$
$$var(S) = 4,$$
$$\Pi_s = 10 + 4\alpha.$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0{,}5$.

Princípio do desvio padrão $\Pi_s = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

- *Carregamento não-negativo*

$$E(S) + \beta\sigma_S \geq E(S)$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{var(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)} \neq \left[E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta\right] + \left[E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta\right]$$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que a > 0, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta\sigma_Z = E(aS) + \beta\sqrt{var(aS)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + \beta\sqrt{a^2 var(S)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta\sigma_S,$$

$$\Pi_z = a\Pi_s$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

- *Consistência*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \beta\sqrt{var(Y)},$$
$$\Pi_Y = E(S + c) + \beta\sqrt{var(S + c)},$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \beta\sqrt{var(S)},$$
$$\Pi_Y = \Pi_s + c.$$

- *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0{,}5$ então:

$$\mathrm{E(S)} = 8 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}5 = 10$$
$$var(S) = (8^2 \times 0{,}5 + 12^2 \times 0{,}5) - 10^2 = 104 - 100 = 4$$

$$\sigma = 2$$
$$\Pi_s = 10 + 2\beta.$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2,Π_s excede 12 quando $\beta > 1$. A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Carregamento não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$E[g(X)] \leq g\big(E(X)\big) \quad \rightarrow g''(x) < 0$$

Temos

$$E[\mu(W + \Pi_s - s\ )] \leq \ \mu(E(W + \Pi_s - S)\ )$$

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_s - S\ )] \leq \mu(E(W + \Pi_s - S)\ )$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$ln(e^{-\alpha W}) \ \geq ln\left(e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}\right)$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➢ *Aditividade*

Em geral o princípio da utilidade zero não é aditivo, mas o princípio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{ln\left[E\left(e^{\alpha(S_1+S_2)}\right)\right]}{\alpha} = \frac{ln\{E(e^{\alpha S_1})E(e^{\alpha S_2})\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{ln[E(e^{\alpha S_1})]}{\alpha} + \frac{ln[E(e^{\alpha S_2})]}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escalava invariante. Suponha que e $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = aS$, em que $a > 0$. Logo

$$\Pi_S = \frac{ln[M_S(\alpha)]}{\alpha} = \frac{ln\left(e^{\frac{\delta^2\alpha^2}{2}+\mu\alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \alpha \neq a\Pi_S$$

➢ *Consistência*

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

Seja $Y = \mathrm{S} + c$, então Π_Y

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$\boxed{\begin{gathered} E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_s - S)] \\ \\ \mu(E(W + \Pi - Y)\,) = \mu(E(W + \Pi_s - S)\,) \end{gathered}}$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$-\alpha e^{-\alpha[W+\Pi_Y - E(Y)]} = -\alpha e^{-\alpha[W+\Pi_s - E(S)]}$$

$$-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)] = -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$\Pi_Y - E(Y) \; = \Pi_s - E(S)$$

$$\Pi_Y \; = \Pi_s - E(S) + E(S) + c,$$

$$\Pi_Y \; = \Pi_s + c$$

➢ *Perda máxima.*

Considerando que r_S é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W+\Pi_s-S)] \geq \mu(W+\Pi_s-r_S)$$

Como $\mu(W)=E[\mu(W+\Pi_s-S)]$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W+\Pi_s-r_S)$$

Como $\mu'(x)>0$, tem-se que:

$$W \geq W+\Pi_s-r_S$$
$$\Pi_s-r_S \leq 0$$
$$\Pi_s \leq r_S$$

Propriedade	Prêmio de Risco	Carregado	Variância	Desvio padrão	Utilidade zero
Carregamento ≥0	✓	✓	✓	✓	✓
Aditividade	✓	✓	✓	✗	✓ (exponencial)
Escala Invariante	✓	✓	✗	✓	✗
Consistência	✓	✗	✓	✓	✓
Perda Máxima	✗	✗	✗	✗	✓

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

De acordo com o enunciado os "valores pagos por cada sinistro" são dados pelos valores assumidos em X_1e X_2. Calcule o que se pede

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ *e* $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

b) $\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z)$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_1$ *e* $\theta = 0{,}03$

c) $\Pi_Z = E(Z) + var(Z)\alpha$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_2$ *e* $\alpha = 0{,}01$

d) $\Pi_{X_2} = \frac{ln[M_{X_2}(\alpha)]}{\alpha}$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_2$ *e* $\alpha = 0{,}1$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

De acordo com o enunciado os "valores pagos por cada sinistro" são dados pelos valores assumidos em X_1e X_2. Calcule o que se pede

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1_i} p(x_{1_i}) = 80$$
$$\Pi_{X_2} = \sum x_{2_i} p(x_{2_i}) = 162$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1_i} p(x_{1_i}) = 80 \text{ e } \Pi_{X_2} = \sum x_{2_i} p(x_{2_i}) = 162$$

b) $\Pi_Z = (1+\theta)E(Z)$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_1$ *e* $\theta = 0{,}03$

$$\Pi_Z = (1{,}03)E(0{,}5X_1) = 0{,}515 \times 80 = 41{,}2$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1_i} p(x_{1_i}) = 80 \ \text{e} \ \Pi_{X_2} = \sum x_{2_i} p(x_{2_i}) = 162$$

b) $\Pi_Z = (1+\theta)E(Z)$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_1$ e $\theta = 0{,}03$

$$\Pi_Z = (1{,}03)E(0{,}5X_1) = 0{,}515 \times 80 = 41{,}2$$

c) $\Pi_Z = E(Z) + var(Z)\alpha$, *sendo que* $Z = 0{,}5X_2$ e $\alpha = 0{,}01$

$$\Pi_Z = 0{,}5E(X_2) + 0{,}5^2 var(X_2)0{,}01 = 1145{,}44$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

...

d) $\Pi_{X_2} = \dfrac{ln[M_{X_2}(\alpha)]}{\alpha}$ *, sendo* $\alpha = 0,1$

$$M_{X_2}(\alpha) = E(e^{X_2\alpha}) = \sum e^{x_{2_i}\alpha} p(x_{2_i}) = 0,2e^{10\alpha} + 0,05e^{200\alpha} + 0,05e^{3000\alpha}$$

$$\Pi_{X_2} = \frac{ln[M_{X_2}(0,1)]}{0,1} = 2970,043$$

Princípio de cálculo de prêmio

- O princípio do prêmio puro de risco não é aplicável pois conduz a ruína.
- O princípio da variância leva valores de prêmios muito elevados
  - Pouco competitivo

...

- A opção por um princípio de cálculo de prêmio sobretudo é
  - Uma escolha subjetiva de quem decide
  - A importância a que se atribuiu a determinada propriedade

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras:Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.